МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Адыгейский государственный университет»

Кафедра математического анализа и
методики преподавания математики

Программа вступительного испытания по
дифференциальным уравнениям и динамичсеким системам
при приеме на обучение в аспирантуру
по направлению подготовки
01.06.01 – Математика и механика,
направленность – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

для поступающих на базе высшего образования

Заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики д.ф.-м.н., доцент_________________________ М.М. Шумафов

Майкоп, 2020

Программа содержит тематический план и систематизированный перечень вопросов дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления, изучение которых предусмотрено Федеральным государственным образовательным стандартом РФ

Требования к уровню подготовки выпускников вузов, проверяемые на испытаниях в АГУ

От сдающих экзамен требуется знание определений основных понятий и фактов из теории дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления, умение устанавливать связи между фактами, доказывать теоремы и знать границы применимости этих теорем с приведением соответствующих примеров и контрпримеров.

Перечень вопросов, выносимых на испытания

1. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений. Решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений, частное решение, общее решение. Частный интеграл и общий интеграл. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решения, поле направлений, связь между геометрической интерпретацией дифференциального уравнения и геометрической интерпретацией его решения. Изоклины. Сведение уравнения n-го порядка к системе.

2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения. Условие Липшица. Основные этапы доказательства. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению. Построение последовательности приближений Пикара. Равномерная сходимость последовательности приближений. Показать, что предельная функция является решением задачи Коши. Единственность решения. Теорема Пеано о существовании решения. Пример неединственности. Теорема о продолжаемости решения дифференциального уравнения. Максимальное продолжение решения. Продолжаемость решения до границы области определения дифференциального уравнения. Пример не продолжаемости на всю ось.

3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Решение системы дифференциальных уравнений. Геометрическая интерпретация системы дифференциальных уравнений и ее решения. Физическая интерпретация системы дифференциальных уравнений как динамической системы. Основные этапы доказательства теоремы существования и единственности. Метод последовательных приближений Пикара. Метод сжимающих отображений. Сравнение обоих методов. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка. Теорема существования и единственности решения для уравнения n-го порядка.

4. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений. Линейная зависимость и независимость функций. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица. Пространство решений линейной однородной системы. Теорема об изоморфизме пространства решений n-мерному векторному пространству начальных значений. Базис и размерность пространства решений. Существование фундаментальных систем решений. Теорема об общем решении линейной однородной системы. Матричная запись линейных однородных систем.

5. Определитель Вронского скалярных функций и вектор-функций. Свойства определителя Вронского. Определитель Вронского и линейная зависимость. Геометрический смысл определителя Вронского. Признаки линейной зависимости. Формула Лиувилля и Остроградского. Частные случай, когда след матрицы линейной системы тождественно равен нулю. Геометрическая интерпретация.

6. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Свойства решений. Принцип суперпозиции. Теорема об общем решении линейной неоднородной системы. Вид общего решения. Геометрическое истолкование структуры общего решения в аффинном, векторно-точечном, пространстве. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.

7. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случаях: a) различных(простых) корней характеристического уравнения, b) кратных корней характеристического уравнения. Примеры решения уравнений с постоянными коэффициентами.

8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Нахождение частных решений неоднородного дифференциального уравнения с правой частью в виде квазимногочлена. Метод комплексных амплитуд. Явление резонанса. Поведение маятника или иной колебательной системы при воздействии внешней гармонической силы.

9. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейной однородной системы в случаях: a) различных (простых) корней характеристического уравнения, b) кратных корней характеристического уравнения. Определение экспоненты матрицы. Свойства экспоненты матрицы. Фундаментальная матрица. Запись решения задачи Коши однородной системы в виде экспоненты от матрицы.

10. Устойчивость, асимптотическая устойчивость и неустойчивость по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений. Сведение устойчивости произвольного решения к устойчивости нулевого решения системы. Определение функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений. Необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости линейных дифференциальных систем. Критерии устойчивости и асимптотической устойчивости линейных дифференциальных систем с постоянной матрицей.

11. Теорема об устойчивости по первому приближению. Случай, когда матрица линейной части нелинейной системы дифференциальных уравнений является постоянной. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения. Достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия нелинейной автономной системы. Исследование устойчивости положения равновесия уравнения нелинейных колебаний маятника в сопротивляющейся среде.

12. Состояния равновесия (особые точки) системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Классификация особых точек (узлы, седла, фокусы, центры). Фазовые портреты в окрестности узлов, седел, фокусов и центров. Устойчивые и неустойчивые узлы и фокусы.

13. Теорема о непрерывности решения по начальным условиям и параметрам. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от начальных значений. Непрерывная зависимость решения от параметров.

14. Теорема о дифференцируемости решения по начальным значениям и параметрам. Дифференцируемая зависимость решения дифференциального уравнения от начальных значений. Дифференцируемая зависимость решения от параметров. Уравнения в вариациях по начальным значениям. Уравнения в вариациях по параметрам.

15. Динамические системы, определяемые дифференциальными уравнениями. Однопараметрические группы преобразований. Фазовые потоки. Фазовые кривые. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Векторное поле фазовой скорости. Фазовый поток дифференциального уравнения. Действие диффеоморфизмов на векторные поля. Действие диффеоморфизма на фазовый поток.

16. Общее определение динамической системы. Орбита точки. Фазовый поток и каскад динамической системы. Три типа траекторий, соответствующие классы движений в динамических системах. Генератор фазового потока. Существование и единственность генератора для любого фазового потока. Генератор фазового потока, заданного экспонентой.

17. Инвариантные множества. Инвариантные множества по отношению к динамической системе или относительно векторного поля. Теоремы о состояниях равновесия (точках покоя) динамической системы. Первые интегралы автономной системы или векторного поля. Существование n–1 первых интегралов в окрестности неособой точки гладкого векторного поля.

18. Теорема о локальной структуре гладкой динамической системы в окрестности неособой точки. Выпрямляющий диффеоморфизм. Теорема о локальном выпрямлении векторного поля. Идея доказательства теоремы.

19. Предельные свойства динамической системы. ω-предельные и α-предельные точки и множества. Свойства предельных множеств. Предельный цикл на плоскости. Разновидности предельных циклов. Теорема Пуанкаре – Бендиксона для двумерного (плоского) потока. Критерий Бендиксона об отсутствии замкнутых орбит. Обобщение критерия Бендиксона, критерий Дюлака.

20. Теорема Хартмана – Гробмана о топологической эквивалентности нелинейной системы ее линейной части в окрестности гиперболической точки. Неподвижные точки (положения равновесия) нелинейной системы. Гиперболические или невырожденные неподвижные точки. Фазовый поток нелинейной системы. Линеаризация нелинейной системы в окрестности неподвижной точки. Фазовый поток линеаризованной системы.

21. Теорема об устойчивом многообразии для неподвижной точки (положения равновесия). Гиперболическая неподвижная точка. Локально устойчивое и неустойчивое многообразия в неподвижной точке. Устойчивое и неустойчивое собственные пространства линеаризованной системы. Связь между локально устойчивыми (неустойчивыми) многообразиями в неподвижной точке и соответствующими устойчивыми (неустойчивыми) собственными пространствами.

22. Постановка задачи оптимального управления. Частные случаи: задача Лагранжа, задача Майера. Фазовые переменные, вектор управлений. Допустимый класс управлений. Решение задачи оптимального управления. Достаточные условия существования решения задачи. Фазовая траектория. Разновидности ограничений на концах фазовой траектории. Целевая функция. Задача Больца. Интегральный и терминальный функционалы. Пример задачи оптимального управления.

23. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления. Формулировка принципа максимума в частном случае, когда фазовые ограничения отсутствуют. Функция Гамильтона. Сопряженная система линейных дифференциальных уравнений. Условие максимума и условия трансверсальности на концах траектории. Идея доказательства принципа максимума Понтрягина для частного случая задачи оптимального управления с закрепленным левым концом фазовой траектории и свободным правым концом.

24. Постановка задачи оптимального быстродействия. Решение задачи оптимального быстродействия (на примере управления движением тележки) с помощью принципа максимума Понтрягина. Дифференциальные уравнения движения управляемого объекта. Функция Гамильтона для данной задачи. Нахождение оптимального программного управления и оптимальной траектории. Вид оптимального управления как функции фазовых координат (синтезирующая функция).

25. Применение принципа максимума к классической задаче вариационного исчисления. Уравнения Эйлера. Постановка классической задачи вариационного исчисления. Переформулировка задачи вариационного исчисления в задачу оптимального управления. Дифференциальное уравнение Эйлера как результат применения принципа максимума Понтрягина. Решение задачи о брахистохроне. Экстремали (решения уравнения Эйлера).

Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1.Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 240 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 223 с.

3. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 303 с.

4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.

5. Еругин Н.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1974. 472 с.

6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 279 с.

7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331с.

8. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М. : Издательский центр «Академия», 2015. 287 с.

9. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959, 468 с.

10. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 326 с.

11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 232 с.

12. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 448 с.

13. Филиппов А.Ф. Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004. 239 с.
14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
15. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1986. 243 с.

Дополнительная:

1.Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1966, 568 с.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 240 с.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1971. 223 с.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003. 216 с.
6. Галеев Э.М. и др. Оптимальное управление (под редакцией Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова). М.: МЦНМО, 2008. 320 с.
7. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
8. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск, 2002. 560 с.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
10. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474.
11. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.

12. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1961. 387.
13. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
14. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., Л.: Гостехиздат, 1949. 550с.
15. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
16. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
17. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
18. Arrowsmith D.K. and Place C.M. An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge etc., Cambridge University Press, 1990. 423 pp.
19. Hale J.K. Ordinary Differential Equations. Dover Publications, INC. Mineola, New York, 1997. 361 pp.
20. Hirsch M. W., Smale S., Devaney R.L. Differential Equations, Dynamical Systems, and Introduction to Chaos. Elsevier, Inc. 2013. 418 pp.